

二阶非线性动态方程的周期边值问题解的存在性

刘会灵¹, 彭世国²

(1. 广东白云学院 基础部, 广东 广州 510450 2 广东工业大学 应用数学学院, 广东 广州 510090)

摘要: 讨论了一类非线性动态方程周期边值问题, 结合时间标度理论, 运用 M a h i n 的重合度定理, 给出了解的存在性判别条件, 并给出了应用举例.

关键词: 时间标度; 周期边值; 动态方程

中图分类号: O 19

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2008)02-0031-04

1 问题的提出

时间标度演算法是 1988 年由德国的 Stefen Hilger^[1]在他的博士论文中提出的一个理论, 后于 1997 年由德国数学家 M. Bohne^[2-3]重新发现并将其发展为时标动态方程理论. 这一理论统一了微分和差分的研究, 将一直以来需要分开研究的两个分支统一在一个体系中研究, 并将研究范围推广到二者中间的情形. 至今, 时标理论已经引起国内外广大学者的关注, 不仅是数学界, 还包括生物学、经济学等领域. 有关时标上周期边值问题已有一些研究结果. 文献 [4] 运用不动点定理和上下解方法, 讨论动态方程

$$-y^{\Delta\Delta}(t) + q(t)y(t) = f(t, y(t))$$

的周期边值问题的单解存在性. 文献 [5] 运用不动点定理讨论了

$$-(py^{\Delta})^{\Delta}(t) + q(t)y^{\sigma}(t) = f(t, y(t))$$

的多周期解的存在性. 文献 [6] 讨论一阶非线性系统的周期边值问题

$x_i^{\Delta}(t) + f_i(t, x_1(\sigma(t)), x_2(\sigma(t)), \dots, x_n(\sigma(t))) = 0$ 的正解的存在性. 本文运用 M a h i n 的重合度定理讨论周期边值问题

$$\begin{cases} u^{\Delta\Delta}(t) = f(t, u(t), u^{\Delta}(t)), & t \in [a, b] \\ u(a) = u(b), u^{\Delta}(a) = u^{\Delta}(b) \end{cases} \quad (1)$$

解的存在性, 得出判别条件. 其中 $[a, b]$ 表示 $[a, b] \cap T$, $a, b \in T$ 且 $0 < b - a < 1$, 这里假设 b 点右稠, f 在 $[a, b] \times R^2$ 上连续.

本文涉及的一些时间标度的理论请参阅文献 [3].

2 预备知识

定义 1 设 X, Z 是赋范空间. $L: X \supset \text{dom } L \rightarrow Z$

是一个线性算子, 如果

a) $\text{Im } L$ 是 Z 的闭子空间;

b) $\dim \text{Key } L = \text{codim Im } L < +\infty$,

则称 L 为指标为零的 Fredholm 算子.

如果 L 为指标为零的 Fredholm 算子, 则存在连续算子 $P: X \rightarrow X$ 及 $Q: Z \rightarrow Z$ 使得

$$\text{Im } P = \text{Ker } L, \text{ Im } L = \text{Ker } Q, X = \text{Ker } L \oplus \text{Ker } P, \\ Z = \text{Im } L \oplus \text{Im } Q, \text{ 并且算子}$$

$$L|_{\text{dom } L \cap \text{Ker } P}: \text{dom } L \rightarrow \text{Im } L$$

可逆, 记其逆算子为 K_p . I 为恒等算子, 记 $K_p(I - Q)$ 为 $K_{p,q}$.

定义 2 设 V 是 X 中的有界开集, 如果 $QN(\bar{\Omega})$ 有界且 $K_{p,q}N: \bar{\Omega} \rightarrow X$ 是紧的, 则称 N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L -紧的.

如果 L 为指标为零的 Fredholm 算子, 则对任意同构映射 $J: \text{Im } Q \rightarrow \text{Ker } L$, 映射 $JQ + K_{p,q}: Z \rightarrow \text{dom } L$ 是同构映射, 并且, 对任意 $u \in \text{dom } L$,

$$(JQ + K_{p,q})^{-1}u = (L + J^{-1}P)u$$

在本文的证明中, 运用到以下的 M a h i n 定理:

定理 1'^[7] 设 $\Omega \subset X$ 是有界开集, L 为指标为零的 Fredholm 算子, N 在 $\bar{V}$ 上是 L -紧的. 如果下列条件成立

a) $Lu \neq \lambda Nu, (u, \lambda) \in ((\text{dom } L \setminus \text{Ker } L) \cap \partial\Omega) \times (0, 1)$;

b) $Nu \notin \text{Im } L, u \in \text{Ker } L \cap \partial\Omega$

c) $\deg(JQN|_{\text{Ker } L \cap \partial\Omega}, V \cap \text{Ker } L, 0) \neq 0$

其中 $Q: Z \rightarrow Z$ 是连续映射, 并且 $\text{Ker } Q = \text{Im } L$, $J: \text{Im } Q \rightarrow \text{Ker } L$ 是一个同构映射, 则方程 $Lu = Nu$ 在 $\text{dom } L \cap \bar{\Omega}$ 上至少有一个解.

记 $X = C^2[a, b]$, $Z = C[a, b]$, 对于任意 $u \in X$, 定义 $\|u\| = \sup\{\|u\|_0, \|u^{\Delta}\|_0\}$, 其中 $\|u\|_0 =$

$\sup_{t \in [a, b]} |u(t)|$. 对任意 $u \in Z$, 定义 $\|u\| = \frac{1}{b-a} \int_a^b |u(t)| \Delta t$

定义线性算子 $L: X \rightarrow \text{dom } L \rightarrow Z$, $Lu = u^{\Delta\Delta}$; $N: X \rightarrow Z$, $Nu = f(t, u(t), u^{\Delta}(t))$, 其中 $\text{dom } L = \{u \in X: u(a) = u(b), u^{\Delta}(b)\}$.

引理 1 $L: X \rightarrow \text{dom } L \rightarrow Z$ 为一个指标为零的 Fredholm 算子.

证明 设 $g \in Z$,

$$u(t) = \int_a^t g(s) \Delta s \Delta \tau - \frac{t}{b-a} \int_a^b g(s) \Delta s \Delta \tau +$$

$d, \quad t \in [a, b],$

其中 d 为常数. 显然, $u(a) = u(b)$.

若 g 满足 $\int_a^b g(\tau) \Delta \tau = 0$ 则 $u^{\Delta}(a) = u^{\Delta}(b)$. 即 $u \in \text{dom } L$ 即

$$\{g \in Z \mid \int_a^b g(\tau) \Delta \tau = 0\} \subseteq \text{Im } L$$

设 $u \in X$, 于是

$$\int_a^t u^{\Delta\Delta}(s) \Delta s \Delta \tau = \int_a^t u^{\Delta}(\tau) - u^{\Delta}(a) \Delta \tau =$$

$$u(t) - u(a) - tu^{\Delta}(a) + au^{\Delta}(a),$$

则

$$u(t) = \int_a^t u^{\Delta\Delta}(s) \Delta s \Delta \tau + tu^{\Delta}(a) + u(a) - au^{\Delta}(a). \quad (2)$$

若 $g \in \text{Im } L$, 则存在 $u \in \text{dom } L \subset X$, 使得 $u^{\Delta\Delta}(t) = g(t)$, 并且满足

$$u(a) = u(b), u^{\Delta}(a) = u^{\Delta}(b),$$

则由 $u(a) = u(b)$ 和式 (2) 可得

$$u^{\Delta}(a) = -\frac{1}{b-a} \int_a^b g(s) \Delta s \Delta \tau$$

由式 (2) 可得

$$u^{\Delta}(t) = \int_a^t g(s) \Delta s + u^{\Delta}(a),$$

因为 $u^{\Delta}(a) = u^{\Delta}(b)$, 可得

$$\int_a^b g(\tau) \Delta \tau = 0$$

因此, $\text{Im } L \subseteq \left\{ g \in Z \mid \int_a^b g(\tau) \Delta \tau = 0 \right\}$.

综上所述可得

$$\text{Im } L = \left\{ g \in Z \mid \int_a^b g(\tau) \Delta \tau = 0 \right\}.$$

定义线性连续算子 $Q: Z \rightarrow Z$ 为

$$Qg = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(\tau) \Delta \tau$$

显然 $Q^2 g = Qg$ 可见 $\text{Im } L = \text{Ker } Q$. 任意 $g \in Z$, 均有

$$g = (g - Qg) + Qg$$

并且, 若 $g \in \text{Im } L \cap \text{Im } Q$, 那么 $g = 0$ 因此 $Z = \text{Im } L \oplus \text{Im } Q$. 因为 $\text{Ker } L = R$, 故

$$\dim \text{Ker } L - \text{codim } \text{Im } L = \dim \text{Ker } L - \dim \text{Im } Q = 0$$

即 $L: X \rightarrow \text{dom } L \rightarrow Z$ 为一个指标为零的 Fredholm 算子.

定义连续线性算子 $P: X \rightarrow X$ 为

$$p(u(t)) = u(a), \quad t \in [a, b].$$

显然 P, Q, L 满足

$$\text{Im } P = \text{Ker } L, \text{Im } L = \text{Ker } Q, X = \text{Ker } L \oplus \text{Ker } P, Z = \text{Im } L \oplus \text{Im } Q.$$

定义 $K_P: \text{Im } L \rightarrow \text{dom } L \cap \text{Ker } P$ 为

$$K_P g(t) = \int_a^t g(s) \Delta s \Delta \tau - \frac{t-a}{b-a} \int_a^b g(s) \Delta s \Delta \tau$$

$$\sup_{t \in [a, b]} |K_P g(t)| = \sup_{t \in [a, b]} \left| \int_a^t g(s) \Delta s \Delta \tau - \frac{t-a}{b-a} \int_a^b g(s) \Delta s \Delta \tau \right| \leq 2(b-a)^2 \|g\|_F$$

$$\sup_{t \in [a, b]} |[K_P g(t)]^{\Delta}| = \sup_{t \in [a, b]} \left| \int_a^t g(s) \Delta s - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(s) \Delta s \Delta \tau \right| \leq 2(b-a) \|g\|_F$$

因此

$$\|K_P g\| \leq 2(b-a) \|g\|, \quad (3)$$

任意 $g \in \text{Im } L$,

$$(LK_P)g(t) = \left(\int_a^t g(s) \Delta s \Delta \tau - \frac{t-a}{b-a} \int_a^b g(s) \Delta s \Delta \tau \right)^{\Delta\Delta} = g(t),$$

任意 $u \in \text{dom } L \cap \text{Ker } P$,

$$(K_P L)u(t) = \int_a^t u^{\Delta\Delta}(s) \Delta s \Delta \tau - \frac{t-a}{b-a} \int_a^b u^{\Delta\Delta}(s) \Delta s \Delta \tau =$$

$$u(t) - u(a) - u^{\Delta}(a) + au^{\Delta}(a) - \frac{t-a}{b-a} u^{\Delta}(a)(a-b) - (u(b) - u(a)) \frac{t-a}{b-a} = u(t) - u(a) = u(t),$$

因此

$$K_P = (L|_{\text{dom } L \cap \text{Ker } P})^{-1},$$

$$QNu = \frac{1}{b-a} \int_a^b (u(\tau), u^{\Delta}(\tau)) \Delta \tau$$

$$K_P QNu(t) = K_P (I - Q)Nu(t) =$$

$$\int_a^t (I - Q)Nu(s) \Delta s \Delta \tau - \frac{t-a}{b-a} \int_a^b (I - Q)Nu(s) \Delta s \Delta \tau$$

3 结论

为了叙述方便, 做以下假设:

H_1) 存在常数 $A > 0$ 对任意 $u \in \text{dom } L \setminus \text{Ker } L$ 且满足 $|u(t)| > A$, $t \in [a, b]$, 都有 $QNu \neq 0$

H_2) 存在可积函数 α, β, ρ 其中 α, β 满足

$$\|\alpha\|_1 \|\beta\|_1 < \frac{1 - (b-a)}{3(b-a)},$$

使得

$$|f(t, x_1, x_2)| \leq \rho(t) + \alpha(t)|x_1| + \beta(t)|x_2|;$$

H_3) 存在常数 $B > 0$ 对任意 $|c| > B$, $c \in R$, 下式成立

$$c \int_a^b f(s, c, 0) \Delta s > 0$$

或

$$c \int_a^b f(s, c, 0) \Delta s < 0$$

定理 2 若 H_1), H_2), H_3) 成立, 则周期边值问题 (1) 至少存在一个解.

证明 设 $V_1 = \{u \in \text{dom } L \setminus \text{Ker } L : Lu = \lambda Nu, \lambda \in (0, 1)\}$. 任意 $u \in \Omega_b$ 均有 $u \notin \text{Ker } L$, 又 $\lambda \neq 0$ 故 $Nu \in \text{Im } L$ 又因为 $\text{Ker } Q = \text{Im } L$, 所以 $QNu = 0$ 即

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \Delta \tau = 0$$

由条件 H_1) 可知, 存在 $t_0 \in [a, b]$, 满足 $|u(t_0)| \leq A$, 则

$$|u(a)| = |u(t_0)| - \int_a^{t_0} u^\Delta(\tau) \Delta \tau \leq |u(t_0)| + (b-a) \|u^\Delta\|_0 \leq A + (b-a) \|u^\Delta\|_0 \quad (4)$$

又

$$|u^\Delta(t)| = \left| \int_a^t \Delta \Delta(t) \Delta t + u^\Delta(a) \right| \leq (b-a) \|Lu\|_1 + |u^\Delta(a)| < (b-a) \|Nu\|_1 + |u^\Delta(a)|, \quad (5)$$

由式 (4)、(5) 可得

$$|u(a)| \leq A + (b-a) \|u^\Delta\|_0 < A + (b-a)^2 \|Nu\|_1 + (b-a) |u^\Delta(a)| \leq A + (b-a) \|Nu\|_1 + (b-a) |u^\Delta(a)|, \quad (6)$$

又考虑到式 (3) 可得

$$\begin{aligned} \|(I-P)u\| &= \|K_P L(I-P)u\| \leq 2(b-a) \|L(I-P)u\|_1 = \\ &2(b-a) \|Lu\|_1 < 2(b-a) \|Nu\|_1, \end{aligned} \quad (7)$$

由式 (6)、(7) 可得

$$\begin{aligned} \|u\| &= \|Pu + (I-P)u\| \leq \|Pu\| + \|(I-P)u\| < |u(a)| + 2(b-a) \|Nu\|_1 < \\ &A + (b-a) \|u^\Delta\|_0 + 3(b-a) \|Nu\|_1. \end{aligned}$$

由于 $\|u\| = \sup\{\|u\|_0, \|u^\Delta\|_0\}$, 结合条件 H_2) 得

$$\|u\|_0, \|u^\Delta\|_0 \leq \|u\| < A + (b-a) \|u^\Delta\|_0 + 3(b-a) \|Nu\|_1 \leq A + [b-a + 3(b-a) \|\beta\|_1] \|u^\Delta\|_0 +$$

$$3(b-a) \|\rho\| + 3(b-a) \|\alpha\|_1 \|u\|_0,$$

由上式可得

$$\|u\|_0 \leq \frac{1}{1 - 3(b-a) \|\alpha\|_1} [A + [b-a + 3(b-a) \|\beta\|_1] \|u^\Delta\|_0 + 3(b-a) \|\rho\|_1], \quad (8)$$

$$\|u^\Delta\|_0 \leq \frac{1}{1 - (b-a) - 3(b-a) \|\beta\|_1} [A + 3(b-a) \|\rho\|_1 + 3(b-a) \|\alpha\|_1 \|u\|_0], \quad (9)$$

由式 (8)、(9) 得

$$\|u^\Delta\|_0 \leq \frac{1}{1 - (b-a) - 3(b-a) \|\beta\|_1 - 3(b-a) \|\alpha\|_1} \times [A + 3(b-a) \|\rho\|_1]$$

即存在 $W_1 > 0$ 使得 $\|u^\Delta\|_0 < W_1$, 由式 (8) 知存在 $W_2 > 0$ 使得 $\|u\|_0 < W_2$, 故 Ω_1 是有界集.

令 $\Omega_2 = \{u \in \text{Ker } L : Nu \in \text{Im } L\}$. 任意 $u \in \Omega_2$ 有 $u = c \in R$ 且 $Nu \in \text{Im } L = \text{Ker } Q$,

即

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(s, c, 0) \Delta \tau = 0$$

由 H_3) 可知, $\|u\| = \|c\| < B$, 故 Ω_2 是有界集.

定义一个同构映射 $J: \text{Im } Q \rightarrow \text{Ker } L$ 为恒等映射, 即 $Jc = c, c \in R$. 不妨设 H_3) 中

$$c \int_a^b f(s, c, 0) \Delta \tau < 0$$

令 $\Omega_3 = \{u \in \text{Ker } L : -\lambda J^{-1}u + (1-\lambda)QNu = 0, \lambda \in [0, 1]\}$, 则任意 $u \in \Omega_3$, $u = c \in R$, 满足

$$\lambda c = \frac{(1-\lambda)}{b-a} \int_a^b f(s, c, 0) \Delta \tau$$

若 $\lambda = 1$ 则 $c = 0$ 若 $|c| > B$, 则有

$$\lambda c^2 = \frac{(1-\lambda)c}{b-a} \int_a^b f(s, c, 0) \Delta \tau < 0$$

矛盾, 故 $|c| \leq B$, 即 $\|u\| = |c| \leq B$, $u \in \Omega_3$, 故 Ω_3 是有界集.

若设 $c \int_a^b f(s, c, 0) \Delta \tau > 0$ 则可令

$$v\Omega_3 = \{u \in \text{Ker } L : \lambda J^{-1}u + (1-\lambda)QNu = 0, \lambda \in [0, 1]\},$$

同样可得到 Ω_3 是有界集.

设 Ω 是一个有界开集且 $\Omega \supset \bigcup_{i=1}^3 \Omega_i$, 则可知

$$Lu \neq Nu, (u, \lambda) \in ((\text{dom } L \setminus \text{Ker } L) \cap \partial\Omega) \times (0, 1), Nu \notin \text{Im } L, u \in \text{Ker } L \cap \partial\Omega$$

下证 N 在 $\bar{\Omega}$ 上为 L -紧.

要证 N 在 $\bar{\Omega}$ 上为 L -紧, 即证 $QN(\bar{\Omega})$ 有界且 $K_{P,Q}N: \bar{\Omega} \rightarrow X$ 是紧的.

因为

$$|QNu| = \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \Delta \tau \right| \leq$$

$$\|\rho\|_1 + \|\alpha\|_1 \|u\|_0 + \|\beta\|_1 \|u^\Delta\|_0,$$

故 $QN(\bar{\Omega})$ 有界.

要证 $K_{P,Q}N: \bar{\Omega} \rightarrow X$ 是紧的, 即证 $K_{P,Q}N(\bar{\Omega})$ 是紧集.

又因为 $f(t, x, y)$ 在 $[a, b] \times \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ 上连续, 可知 $K_{P,Q}N(\bar{\Omega})$ 一致有界和等度连续. 由 Arzelà-Ascoli 定理知 $K_{P,Q}N(\bar{\Omega})$ 是紧集. 因此 N 在 $\bar{V}$ 上为 L -紧.

任意 $u \in \text{Ker} L \cap \partial \Omega$, 定义 $H(u, \lambda) = \pm \lambda u + (1 - \lambda) JQN u$, 利用同伦不变性

$$\deg(JQN|_{\text{Ker} L \cap \partial \Omega}, \Omega \cap \text{Ker} L, 0) =$$

$$\deg(H(\cdot, 0), \Omega \cap \text{Ker} L, 0) =$$

$$\deg(H(\cdot, 1), \Omega \cap \text{Ker} L, 0) =$$

$$\deg(\pm J, \Omega \cap \text{Ker} L, 0) \neq 0$$

又由引理 1 知, $L: X \rightarrow \text{dom } L \rightarrow Z$ 为一个指标为零的 Fredholm 算子. 故由定理 1 知, 周期边值问题 (1) 在 Ω 上至少存在一个解.

4 应用举例

考察周期边值问题

$$\begin{cases} u^\Delta = \frac{1}{4}(t + \sigma(t)) + \frac{1}{9} \arctan u(t) + \frac{1}{9} u^\Delta(t), \\ t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ u(0) = u\left(\frac{1}{2}\right), u^\Delta(0) = u^\Delta\left(\frac{1}{2}\right), \end{cases}$$

取 $T = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 取 $A = B = 3$

$\alpha(t) = \beta(t) = \frac{1}{9}$, $\rho(t) = t + \sigma(t)$, 条件 H_2 满足. 当 $u(t) > 3$ 时,

$$\begin{aligned} QNu &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{4}(t + \sigma(t)) + \frac{1}{9} \arctan u(t) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{9} u^\Delta(t) \right] \Delta t = 2 \left[\frac{1}{16} + \frac{1}{9} \int_0^{\frac{1}{2}} \arctan u(t) \Delta t \right] > 0 \end{aligned}$$

当 $u(t) < -3$ 时, $QNu = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{4}(t + \sigma(t)) + \frac{1}{9} \arctan u(t) + \frac{1}{9} u^\Delta(t) \right] \Delta t < \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \arctan(-3) = -0.0138$ 故条件 H_1 满足;

又当 $c > 3$ 时, $c \int_0^{\frac{1}{2}} f(s, c, 0) \Delta s > 0$

当 $c < -3$ 时, $c \int_0^{\frac{1}{2}} f(s, c, 0) \Delta s = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{c}{4}(s + \sigma(s)) + \frac{1}{9} c \arctan c + 0 \right] \Delta s = \frac{c}{16} + \frac{c}{18} \arctan c > \frac{-3}{16} + \frac{-3}{18} \arctan(-3) > 0.0207 > 0$

故条件 H_3 满足. 由定理 2 可知该边值问题至少有一个解.

参考文献:

- [1] Stefan Hilger Ein Maß kettenkalkül in Anwendung Auf Zentrumsannigfaltigkeiten, PHD thesis [D]. University at Würzburg 1988
- [2] Bohner M, Agarwal R P. Quadratic functionals for second order matrix equations on time scales [J]. Nonlinear Analysis, 1998, 33: 675-692
- [3] Bohner M, Peterson A. Dynamic equations on time scales: An introduction with applications [M]. Boston: Birkhäuser 2001
- [4] Gulsan Topal S. Second order periodic boundary value problems on time scales [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2004(44): 637-648
- [5] Douglas R Anderson. Multiple periodic solutions for a second order problem on periodic time scales [J]. Nonlinear Analysis, 2005(60): 101-115
- [6] Sun Jiarping, Li Warrong. Positive solution for System of Nonlinear First order PBVPs on Time scales [J]. Nonlinear Analysis, 2005(62): 131-139
- [7] Guo D, Lakshmikantham V. Nonlinear problems in abstract cones [M]. New York: Academic Press, 1988

The Existence to Solution to Second-order Nonlinear Dynamical Equation

Liu Huirong¹, Peng Shirguo²

(1 Department of Basic Sciences, Guangdong Baiyun University, Guangzhou 510450, China)

2 Faculty of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China)

Abstract The existence of solution is studied to second-order nonlinear dynamical equation by using the method of coincidence degree theorem advanced by Mawhin. The conditions for the existence are given, and the solution is illustrated.

Key words time scales; period boundary; dynamical equation